

# Berechnungen an mehrdimensionalen Kugeln

Eigenschaften der D-Parabel

© Dipl. Ing. Hans Holger Lorenz

13. Februar 2013

Diese Arbeit zur D-Parabel ist D.A.R.L. gewidmet.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Bestimmungsformeln für die Volumina mehrdimensionaler Kugeln</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Die Verläufe der Volumen-Zahlenwerte mit wachsender Größe der Radien</b>	<b>6</b>
3.1	Die Volumina mehrdimensionaler Einheitskugeln . . . . .	6
3.2	Die Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 2 . . . . .	7
3.3	Die Volumina mehrdimensionaler Kugeln mit dem Radius 3 . . . . .	8
3.4	Die Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 4 . . . . .	10
3.5	Die Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 5 . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Einführung der D-Parabel</b>	<b>12</b>
4.1	Einführung der D-Parabel am Beispiel mehrdimensionaler Kugeln mit dem Radius 6 . . . . .	12
4.2	Die D-Parabel und die Volumina der Kugeln mit den Radien 7 ... 10 . . . .	13
4.3	Ausgewählte Ergebnisse für die Volumina und die Werte der zugehörigen D-Parabel . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Oberflächen (Sphären) mehrdimensionaler Kugeln</b>	<b>16</b>
5.1	Gegenüberstellung der Volumina und Oberflächeninhalte . . . . .	16
5.2	Die D-Parabel und ausgewählte Werte von Oberflächen (Sphären) mehr- dimensionaler Kugeln . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Eigenschaften der D-Parabel</b>	<b>20</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>Begriffe</b>	<b>23</b>
<b>9</b>	<b>Quellen</b>	<b>25</b>

# 1 Einleitung

Im dreidimensionalen Koordinatensystem stehen die Achsen  $x$ ,  $y$ ,  $z$  senkrecht aufeinander. Die Schwierigkeiten der Behandlung von Fragen über  $n$ -dimensionale Räume zeigen sich bereits mit den Grenzen der Vorstellungskraft an vier jeweils senkrecht aufeinander stehenden Achsen. Zu den Achsen  $x$ ,  $y$ , und  $z$  käme eine weitere Achse  $w$  hinzu, die auf allen drei anderen auch senkrecht zu stehen hätte. Dann wäre ein Koordinatensystem gegeben, das einem 4-dimensionalen Raum entspräche. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren [1] gestattet vergleichbare Vorgänge im  $n$ -dimensionalen Vektorraum, allerdings ausschließlich in einem Orthogonalsystem von  $n$  paarweise orthogonalen Vektoren. Im vorliegenden Text geht es um mathematische Abstraktionen und nicht um Betrachtungen physikalischer Realitäten. Auch deswegen sind die Herleitungen mit kritischem Abstand zu betrachten. Der interessante Teil der Arbeit liegt in der herausfordernden Schwierigkeit, die Vermutungen über die D-Parabel mathematisch korrekt zu formulieren. Angeregt wurden diese vom Charakter her mehr numerischen Spekulationen durch die wunderbaren Bilder der Modelle aus den Archiven [2] der *Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, des *mathematischen Instituts der königlichen technischen Hochschule München* und aus dem *Palais de la Découverte Paris*. Die Modelle dienten den Forschungsarbeiten und der Lehrtätigkeit in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Um die 1870er und 1880er Jahre verfügten die damaligen Mathematiker noch nicht über solche phantastische Rechentechnik, wie sie heute zur Verfügung steht.

Für die folgenden Betrachtungen sollte man einen Hinweis von Blaise Pascal sicher berücksichtigen, als er um 1654 schrieb: *“...daß man eine stetige Größe nicht erhöht, wenn man ihr, in welcher Zahl man immer wolle, Größen einer unendlich geringeren Ordnung hinzufügt. Derart fügen die Punkte nichts zu den Linien, die Linien nichts zu den Flächen, die Flächen nichts zu den Kuben...”* [3]. Nun liefert bekanntlich die Riemannsche Zahlenkugel anschauliche Beispiele dafür, wie sich unendlichen Geraden auf (endliche) Kreisumfänge abbilden lassen und umgekehrt die endlichen Kreisumfänge schließlich zu unendlichen Geraden werden können. (Siehe Abschnitt Begriffe).

Genau genommen werden in den folgenden Seiten nur Zahlenwerte betrachtet! Eine physikalische Interpretation erscheint nicht sinnvoll, da ein grundsätzlicher Regelverstoß vorliegt: auf Längeneinheiten ( $n = 1$ ) folgen Flächeneinheiten ( $n = 2$ ), dann Raumeinheiten ( $n = 3; 4; 5\dots$ ). Der Regelverstoß wird besonders deutlicher am beispielhaften Vergleich zwischen den Größen einer Länge, einer Fläche, eines Kubus und eines Trägheitsmomentes bei gleicher Ziffernanzeige. Darum sei noch einmal deutlich hervor-

gehoben, das es hier um reine Zahlenwerte und Ziffernfolgen gehen wird. Dennoch, das Jonglieren mit mehrdimensionalen Kugeln eignet sich hervorragend für das Betrachten von Erscheinungen großer und sehr großer Zahlen.

Damit sei zugleich ein weiteres Darstellungsproblem genannt. Mit der Folge der Größen für die Dimensionen, erfaßt mit den Kardinalzahlen  $n = 1, 2, 3$ , u.s.w. entstehen immer diskrete Werte und keine Kontinua. Die bildlichen Darstellungen werden jedoch einige Male in kontinuierlichen Verläufen angelegt, weil es schon in kleineren Bereichen für  $n$  und  $r$  bei resultierenden Volumina und Sphären sehr schnell in sehr große Zahlen geht und die Darstellungsbereiche visuell nicht mehr in der Bildanordnung unterschieden werden können.

Die hier vorgelegten Ergebnisse wurden mit den mathematischen Lehrprogrammen Winfunktion-Mathematik 9.0 , der Demo-Version von MathCAD 6.0 und der Maple V-Demo für Schüler und Studenten ermittelt.

## 2 Bestimmungsformeln für die Volumina mehrdimensionaler Kugeln

Das Volumen einer *n-dimensionale Kugel* bestimmt sich nach [4] mit folgender Formel:

$$V = \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot r^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

Es entsteht eine sehenswerte Kleinigkeit, wenn man statt der Begriffe Kreisumfang und Kreisfläche von Anfang an die Dimensionsanzahl mit dem Begriff der Kugel verbindet. Die folgende Tabelle zeigt die Formeln für die Kugeln mit den Dimensionen von  $n = 1$  bis  $n = 10$ .

eindimensionale Kugel	$V_{1D} = 2 \cdot \pi \cdot r^1$
zweidimensionale Kugel	$V_{2D} = 1 \cdot \pi \cdot r^2$
dreidimensionale Kugel	$V_{3D} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
vierdimensionale Kugel	$V_{4D} = \frac{1}{2} \cdot \pi^2 \cdot r^4$
fünfdimensionale Kugel	$V_{5D} = \frac{8}{15} \cdot \pi^2 \cdot r^5$
sechsdimensionale Kugel	$V_{6D} = \frac{1}{6} \cdot \pi^3 \cdot r^6$
siebdimensionale Kugel	$V_{7D} = \frac{16}{105} \cdot \pi^3 \cdot r^7$
achtdimensionale Kugel	$V_{8D} = \frac{1}{24} \cdot \pi^4 \cdot r^8$
neundimensionale Kugel	$V_{9D} = \frac{32}{2945} \cdot \pi^4 \cdot r^9$
zehndimensionale Kugel	$V_{10D} = \frac{1}{120} \cdot \pi^5 \cdot r^{10}$

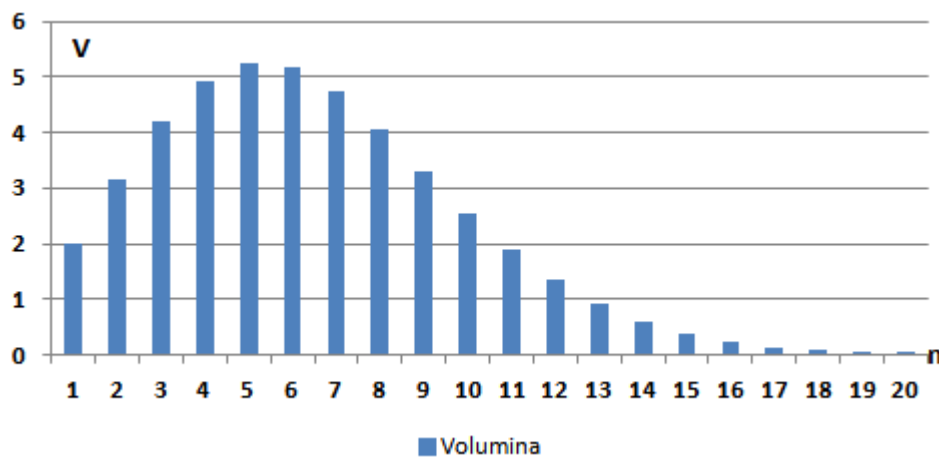
### 3 Die Verläufe der Volumen-Zahlenwerte mit wachsender Größe der Radien

#### 3.1 Die Volumina mehrdimensionaler Einheitskugeln

Kugeln mit dem Radius  $r = 1$  werden landläufig als Einheitskugeln bezeichnet, so auch in vorliegender Darstellung. Das Volumen einer solchen Kugel bestimmt sich dann nach folgender Formel:

$$V = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

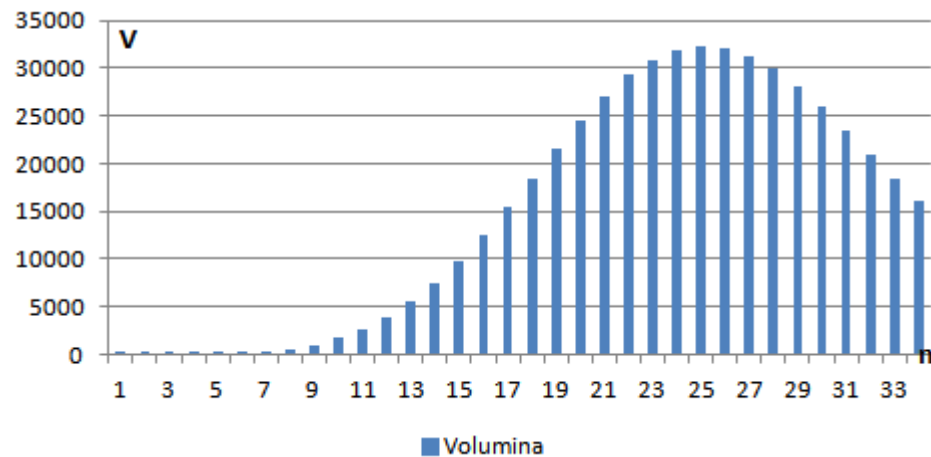
Zwei Größen spielen dabei eine besondere Rolle, die Potenz der Zahl  $\pi$  im Zähler und die Gamma-Funktion  $\Gamma(n)$  im Nenner. Beide Größen weisen starke Anstiege auf und arbeiten durch den Bruch in gegenläufiger Tendenz. So entsteht ein spezieller *Entwicklungs*-Verlauf der Volumenwerte. Er ist offenbar dadurch gekennzeichnet, dass es zu einem zahlenmäßigen Höhepunkt kommt, den man auf Grund der unterschiedlichen Dimensionsgrößen  $n$  eigentlich nicht Maximum nennen dürfte. Der Einfachheit wegen soll jedoch hier diese Festlegung gelten: im Folgenden wird der Begriff *Maximum* genau für diesen Höhepunkt verwendet.



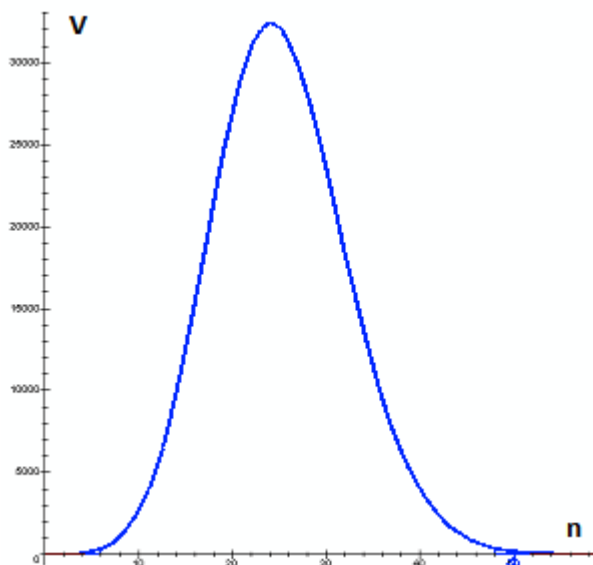
### 3.2 Die Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 2

Für das Volumen einer  $n$ -dimensionale Kugel mit dem Radius 2 wurde folgende Formel genutzt:

$$V = \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot 2^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$



Man kann ab hier annehmen, dass ein formähnlicher Verlauf zu den Ergebnissen der Einheitskugeln zu beobachten ist und tatsächlich ist der folgenden Abbildung zu entnehmen, dass genau ein zahlenmäßiger Höhepunkt, also ein *Maximum* erscheint. Der weiteren Einfachheit erfolgt hier eine Darstellung auch als geschlossenen Kurvenverlauf, obwohl es sich bei den Volumina in Wirklichkeit um diskrete Größen handelt.





### 3.3 Die Volumina mehrdimensionaler Kugeln mit dem Radius 3

Formal folgerichtig werden die Volumina der *n-dimensionalen Kugeln* mit dem Radius 3 mit dieser Formel berechnet:

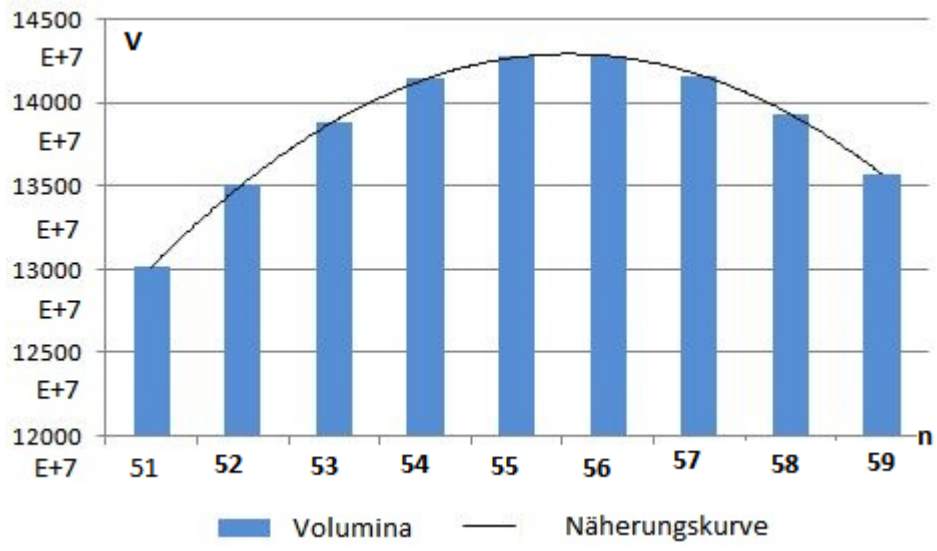
$$V = \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot 3^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

In der nachstehender Tabelle sind die Werte für die Volumina in der Umgebung des scheinbaren <sup>1</sup> *Maximums* V(n;3) dargestellt. Vom scheinbaren Maximum muß man hier sprechen, weil das Volumen für V(n;r) mit jedem n+1 eine neue ( für constante n unendlich entfernte ) Dimension (n+1) erreicht. Beispielsweise ist ein Volumenbereich V(3;r) eine qualitativ andere Größe als ein V(2;r) wie eben eine Kreisfläche eine andere Größe darstellt als eine reale (dreidimensionale) Kugel .

Dimension n	Volumen
51	1,3016 E+11
52	1,3508 E+11
53	1,3886 E+11
54	1,4145 E+11
55	1,4278 E+11
56	1,4284 E+11
57	1,4165 E+11
58	1,3926 E+11
59	1,3576 E+11

---

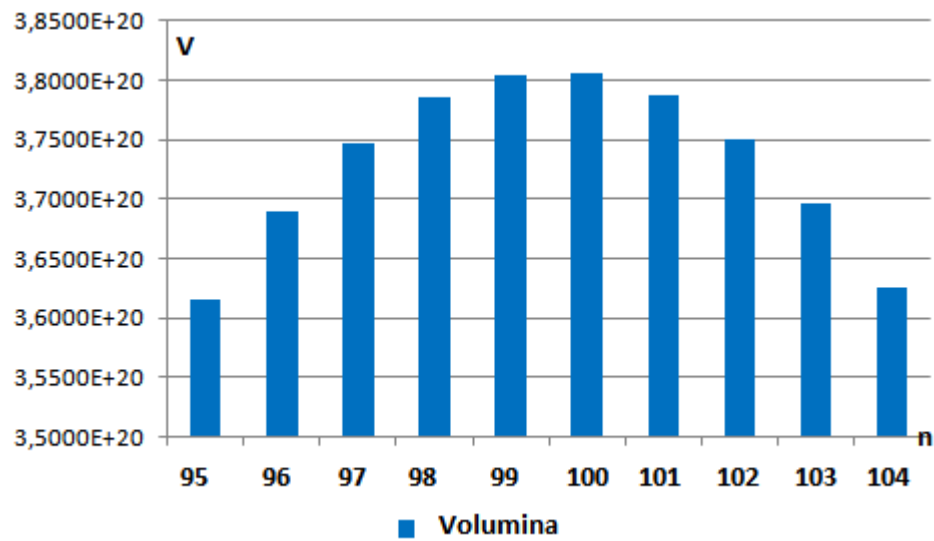
<sup>1</sup>Es sei hier noch einmal auf die Scheinbarkeit des verwendeten Begriffs *Maximum* verwiesen. Vom scheinbaren Maximum muß man hier sprechen, weil das Volumen für V(n;r) mit jedem n+1 nach Pascal in eine unendlich entferntere höhere Region steigt. Erinnerung sei daran, das ein V<sup>9</sup> einer qualitativ höheren Größe gegenüber einem V<sup>8</sup> entspricht. Vermutlich wird mit wachsendem n die Zahl selbst gegen 0 tendieren während die Ordnungsgröße des Volumens gegen Unendlich läuft. Formal logisch weiter gedacht wäre dann beispielsweise eine unendlichdimensionale Einheitskugel ein Volumen-Punkt mit der Ausdehnung Null und dem Radius 1. Es ist interessant, in dem Zusammenhang an den persischen Astronom al-Biruni (973 - 1051) zu erinnern. Bei seiner Erläuterung der Zahlensymbole des Sanskrit zählt er für die Zahl Null die Worte *Leere* und *Raum* auf mit der Ergänzung *Sie bedeuten den Punkt*. (Siehe G. Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen, Köln 1998 S.520)



### 3.4 Die Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 4

Formal folgerichtig werden die Volumina der  $n$ -dimensionalen Kugeln mit dem Radius 4 mit dieser Formel berechnet:

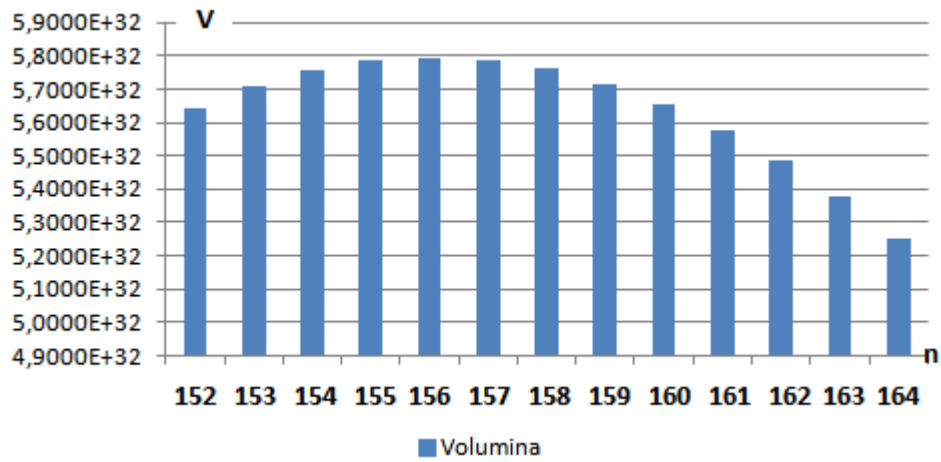
$$V = \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot 4^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$



### 3.5 Die Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 5

Formal folgerichtig werden die Volumina der  $n$ -dimensionalen Kugeln mit dem Radius 5 mit dieser Formel berechnet:

$$V = \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot 5^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$



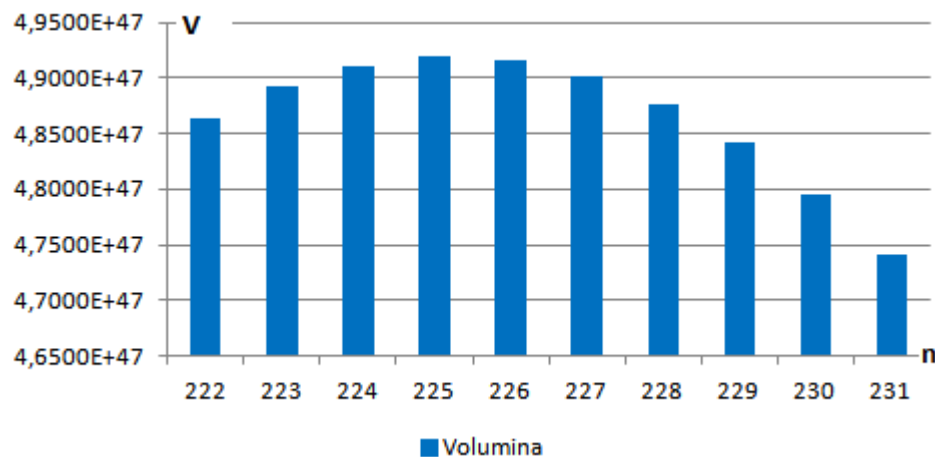
## 4 Einführung der D-Parabel

### 4.1 Einführung der D-Parabel am Beispiel mehrdimensionaler Kugeln mit dem Radius 6

Zuerst sollen wieder die Volumina der  $n$ -dimensionalen Kugeln mit dem Radius 6 mit der Formel

$$V = \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot 6^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

berechnet werden. Die Ergebnisse im Bereich des scheinbaren Maximums sind in nachstehender Abbildung dargestellt.



Man kann deutlich ein Maximum bei  $n = 225$  ablesen.<sup>2</sup> Zwei Dinge sprechen gegen eine simple Extremwertbestimmung nach formalen Vorschriften für Funktionen. Zum einen handelt es sich bei der Dimension  $n$  nicht um eine kontinuierliche Variable sondern um die diskreten Werte  $n, n+1, n+2, \dots$ . Zum anderen stellt die Gammafunktion im Nenner ein großes Hindernis für einfache Ableitungen dar. Für die weiteren Untersuchungen zeigten sich von hier an zwei verschiedene Richtungen. Zum einen der Weg über Näherungsfunktionen für die Ableitungen. Die andere Richtung betraf den numerischen Pfad der Ziffernfolge für die Zahl des scheinbaren Maximums. Die Entscheidung fiel für den numerischen Pfad. Zur Bestimmung ausgewählter Volumina mehrdimensionaler Kugeln empfahlen sich sonderbarer Weise die Stellen und Ziffer (Digits) der Zahl  $\pi$ .

<sup>2</sup>Es sei der Hinweis gestattet, dass wir uns jetzt gedanklich schon in einem Zahlbereich mit 48 Stellen vor dem Komma befinden.

## 4.2 Die D-Parabel und die Volumina der Kugeln mit den Radien 7 ... 10

Hier sollen die Werte der scheinbaren Maxima in einer Tabelle eine Übersicht bringen.

Radius	Formel	Volumen (max )	$n_{\max}$
r = 7	$V = \sqrt{\pi^n} \cdot 7^n / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$	2,3015 E+ 65	307
r = 8	$V = \sqrt{\pi^n} \cdot 8^n / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$	5,8829 E+ 85	401
r = 9	$V = \sqrt{\pi^n} \cdot 9^n / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$	8,1806 E+108	508
r = 10	$V = \sqrt{\pi^n} \cdot 10^n / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)$	6,1677 E+134	627

Für die Verläufe der Werte  $V(n;r)$  kann festgestellt werden, das sich bei konstantem Radius für jede Kurve genau ein Maximum (bei  $n_{\max}$ ) einstellt. Nach numerischer Auswertung vieler Rechenergebnisse ergab sich eine gewisse Regelmäßigkeit. Sie stellt sich in einer Funktionsgleichung dar:

$$n_{\max} = \lambda | (2\pi r^2 - 1) |$$

Diese Gleichung, gelesen  $\lambda$  an der Stelle  $2\pi r^2 - 1$ , sei im Folgenden D-Parabel (D = Dimension) genannt. Werden die Werte der D-Parabel den ermittelten Maximalwerten gegenübergestellt, ergibt sich folgende Tabelle:

Radius	$(2\pi r^2 - 1)$	$\lambda$	$n_{\max}$
7	306,876080	307	307
8	401,123860	401	401
9	507,938010	507	507
10	627,318531	627	627

Genauer betrachte zeigt sich, das die Ziffernfolge wesentlich von der Zahl  $\pi$  bestimmt wird. Sie ist der Koeffizient, der als einziger über eine unendliche Stellenzahl verfügt, und so selbst für n gegen Unendlich fortlaufend Werte für  $n_{\max}$  bereitstellen kann. Erneut offenbart diese wunderbare transzendente Irrationale  $\pi$  ihre geheimnisvollen Besonderheiten.

### 4.3 Ausgewählte Ergebnisse für die Volumina und die Werte der zugehörigen D-Parabel

Im Folgenden werden die Rechenergebnisse der scheinbaren Maximalwerte der Volumina für die mehrdimensionalen Kugeln mit den Radien bis  $r=190$  dargestellt. Dabei ist zu berücksichtigen, das Zahlbereiche erreicht werden, die mehr als vierzigtausend Stellen vor dem Komma aufweisen können. Ohne Näherungsfunktionen kann das nicht bewerkstelligt werden. So wurden beispielsweise zur Bestimmung der Gammawerte die Näherungsvorschriften von Stirling verwendet. Zur Verfügung standen unterschiedliche handelsübliche Mathematikprogramme, deren Ausstattung für diese Berechnungen natürlicherweise nicht gedacht waren und demzufolge in mehr oder weniger umständlichen Rechenschritten vorgegangen werden mußte. Das hat die Genauigkeit der Aussagen sicher nicht erhöht. Grobe Abschätzungen und Vergleiche der auf verschiedenen Wegen erreichte Ergebnisse konnten bis zum Bereich  $r=190$  als befriedigend gelten.

Für die Radien 1 bis 10 wurden folgende Werte ermittelt:

Radius	$(2 \pi r^2 - 1)$	$\lambda$	$n_{\max}$	$V_{\max}$
1	5,283185	5	5	5,2638
2	24,132741	24	24	32372,885
3	55,548668	56	56	1,4284 E+11
4	99,530965	100	100	3,8056 E+20
5	156,079633	156	156	5,7944 E+32
6	225,194671	225	225	4,9190 E+47
7	306,876080	307	307	2,3015 E+65
8	401,123860	401	401	5,8829 E+85
9	507,938010	508	508	8,1806 E+108
10	627,318531	627	627	6,1677 E+134

Für die Radien  $r = 10, 20, \dots, 190$  wurden folgende Werte ermittelt:

Radius	$(2 \pi r^2 - 1)$	$\lambda$	$n_{\max}$	$V_{\max}$
10	627,318531	627	627	6,167739 E+134
20	2.512,274123	2512	2512	6,337042 E+543
30	5.653,866776	5654	5654	6,515550 E+1225
40	10.052,096491	10052	10052	5,655251 E+2180
50	15.706,963268	15707	15707	3,928771 E+3408
60	22.618,467106	22618	22618	2,133346 E+4909
70	30.786,608005	30787	30787	8,940756 E+6682
80	40.211,385966	40211	40211	2,870202 E+8729
90	50.892,800988	50893	50893	7,023625 E+11048
100	62.830,853072	62831	62831	1,305797 E+13641
110	76.025,542217	76025	76025	1,840030 E+16506
120	90.476,868423	90477	90477	1,961785 E+19644
130	106.184,831691	106185	106185	1,580425 E+23055
140	123.149,432021	123149	123149	9,610467 E+26738
150	141.370,669412	141371	141371	4,407655 E+30695
160	160.848,543864	160849	160849	1,523617 E+34925
170	181.583,055377	181583	181583	3,967481 E+39427
180	203.574,203953	203574	203574	7,779068 E+44202
190	226.821,989589	226822	226822	1,148036 E+49251



## 5 Oberflächen (Sphären) mehrdimensionaler Kugeln

### 5.1 Gegenüberstellung der Volumina und Oberflächeninhalte

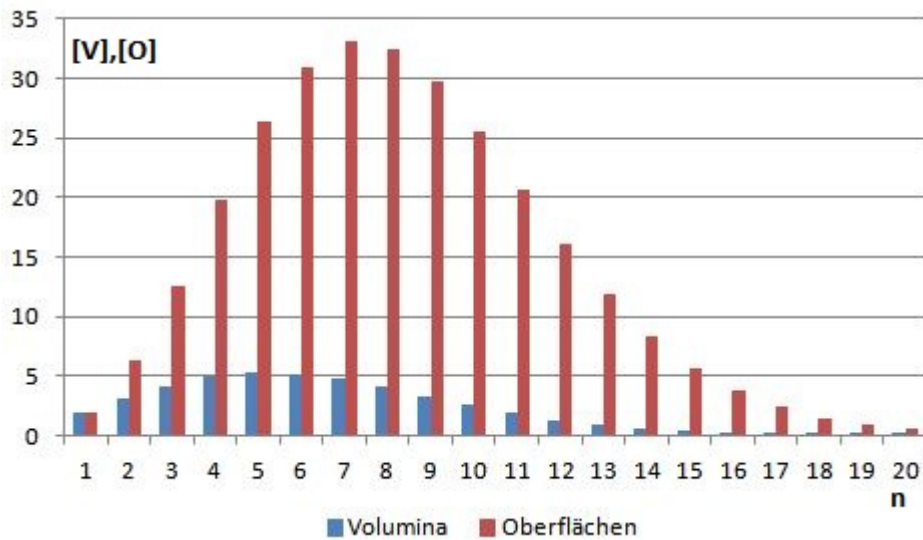
Normalerweise stellt man Flächenberechnungen den Voluminaabestimmungen voran. Wenn hier eine umgekehrte Vorgehensweise angewendet wird, hat das seinen Grund im schnellen Anstieg der Zahlengrößen. Es zeigt sich, dass die Werte für die Sphären schneller höhere Zahlen erreichen als die der Volumina. Begonnen sei mit dem Vergleich an den Einheitskugeln. Analog der Verfahrensweise für Volumina mehrdimensionaler Kugeln gilt die Bestimmung von Oberflächen mehrdimensionaler Kugeln. Hierfür wird die Formel nach [5] genutzt:

$$O(n; r) = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

Die Tabelle zeigt eine Gegenüberstellung der Zahlenwerte für die Volumina  $V(n;1)$  und die Flächeninhalte  $O(n;1)$  :

Dimension n	Volumen $V(n;1)$	Oberflächen $(n;1)$
1	2,0000	2,0000
2	3,1416	6,2832
3	4,1888	12,5664
4	4,9348	19,7392
5	5,2638	26,3189
6	5,1677	31,0063
7	4,7248	33,0734
8	4,0587	32,4697
9	3,2985	29,6866
10	2,5502	25,5016
11	1,8841	20,7251
12	1,3353	16,0232
13	0,9106	11,8382
14	0,5993	8,3897
15	0,3814	5,7216
16	0,2353	3,7653
17	0,1410	2,3967
18	0,0821	1,4786
19	0,0466	0,8858
20	0,0258	0,5161

Das scheinbare Maximum der Volumina der mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius 1 liegt erkennbar bei  $n = 5$  und das für die Oberflächeninhalte bei  $n = 7$ . Auch bei den Sphären zeigt sich, dass die Gammafunktion  $\Gamma(n)$  im Nenner ab einem bestimmten Dimensionswert  $n_{\max}$  über einen größeren Anstieg verfügt als die Potenzfunktion von  $\pi$  im Zähler. Dieses Verhältnis führt zu der widersprüchlich erscheinenden Aussage: je größer die Dimensionszahl (also die Maßeinheit)  $n$  über  $n_{\max}$  hinauswächst, desto kleiner ergibt sich die zu messende Größe. Das erweckt die spekulative Frage, ob bei  $n \rightarrow \infty$  der Oberflächeninhalt  $\rightarrow 0$  strebt? Eine analoge Frage würde sich beim Volumen ergeben. Auf beide kann hier keine Antwort gegeben werden.



Nach [7] berechnen sich nun die Oberflächen für mehrdimensionale Kugeln mit den Radius  $r$  wie folgt:

$$O = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi^n} \cdot r^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

In der nachstehenden Tabelle werden die Werte der scheinbaren Maxima für Volumina und Oberflächeninhalte ausgewählter Radien gegenübergestellt. Die Auswahl der Radien wurde nur von der Einfachheit der Darstellung bestimmt. Man kann leicht erkennen, dass die  $n_{\max}$  für die Sphären den  $n_{\max}$  für die Volumina um 2 vorausseilen. Eine Gültigkeit für weitere Radien ist zu vermuten.

Radius	$n_{\max}$ Volumen	$V_{\max}$	$n_{\max}$ Sphäre	$O_{\max}$
8	401	5,8822 E+85	403	2,9567 E+87
9	508	8,1793 E+108	510	4,6253 E+110
10	627	6,1677 E+134	629	3,8745 E+136
11	759	2,5148 E+163	761	1,7381 E+165
12	904	5,5377 E+194	906	4,1753 E+196
13	1061	6,5757 E+228	1063	5,3711 E+230
14	1231	4,2059 E+265	1233	3,6997 E+267
15	1413	1,4481 E+305	1415	1,3648 E+307

## 5.2 Die D-Parabel und ausgewählte Werte von Oberflächen (Sphären) mehrdimensionaler Kugeln

Unter der zu vermutenden Gültigkeit, dass sich die  $n_{\max}$ -Werte für die Oberflächen gegenüber den  $n_{\max}$ -Werten für die Volumina immer um  $2n$  nach außen verschieben, lautet die zugehörige D-Parabel

$$n_{\max} = \lambda|(2\pi r^2 + 1)$$

Um die These zu untermauern, werden hier einige ausgewählte Daten (ohne Vollständigkeit) aufgeführt:

Radius	$(2 \pi r^2 + 1)$	$\lambda$	$n_{\max}$	$O_{\max}$
8	403,1238597	403	403	2,9567 E+87
9	509,9380099	510	510	4,6253 E+110
10	629,3185307	629	629	3,8745 E+136
11	761,2654222	761	761	1,7381 E+165
12	905,7786842	906	906	4,1753 E+196
13	1062,858317	1063	1063	5,3711 E+230
14	1232,50432	1233	1233	3,699705 E+267
15	1414,716694	1415	1415	1,364768 E+307

## 6 Eigenschaften der D-Parabel

Wie bereits beschrieben, bietet die D-Parabel

$${}_v n_{max} = \lambda | (2\pi r^2 - 1)$$

vermutlich in ihrer Ziffern- und Stellenfolge die notwendigen Werte für die Bestimmung des Abszissenwertes  ${}_v n_{max}$  (5; 24; 56; ...) für das scheinbare Volumenmaximum der mehrdimensionalen Kugeln mit den Radien 1; 2; 3; ... . Ebenso ist zu vermuten, das eine entsprechende D-Parabel für die Oberflächen der mehrdimensionalen Kugeln gilt

$${}_o n_{max} = \lambda | (2\pi r^2 + 1)$$

die für o.g. Radien die Abszissenwerte  ${}_o n_{max}$  7; 26; 58; ... liefert.

Auffällige Einflußgröße bei der Anwendung ist aber nicht der Radius sondern die Transzendente  $\pi$  mit ihrer unendlichen Stellenzahl. Ihre *Digits* bestimmen auf besondere Art und Weise, wo das zahlenmäßige Maximum sowohl der Volumina als auch der Oberflächen zu finden ist.

Eine weitere Besonderheit schließt sich dem an:

$$D(r) = (2\pi r^2 - 1) = ((2\pi r)r - 1)$$

Offensichtlich findet man den Umfang des Kreises mit dem Radius r als einen spezifischen Faktor in dieser Parabel. Differenziert man diese Parabelfunktion nach r, erhält man einen Hinweis auf die Verdopplung des Kreisumfangs:

$$D'(r) = 4\pi r$$

Noch kurioser wirkt das Ergebnis der zweiten Ableitung nach r:

$$D''(r) = 4\pi$$

Man findet jedoch nicht nur einen Hinweis auf den Kreisumfang in der D-Parabel sondern auch einen auf die Kreisfläche. Schreibt man für

$$D(r) = (2\pi r^2 - 1) = \frac{2\pi d^2}{4} - 1 = \frac{\pi d^2}{2} - 1$$

erkennt man mit dem Durchmesser  $d = 2r$  erneut die um 1 reduzierte doppelte Kreisfläche.

Das wären Aussagen, die den eindimensionalen und den zweidimensionalen Bereich betreffen. Für die Mehrdimensionalität ergeben sich jedoch noch weitere Informationen. Die D-Parabel (sowohl für Volumen als auch für Oberflächen) enthält tatsächlich bei gegebenen  $r$  mehr indirekte Informationen als man auf den ersten Blick erwartet:

1. Sie enthält den Umfang des Kreises zum Radius  $r$ , also den Volumeninhalt der eindimensionalen Kugel.
2. Sie enthält die Größe der Kreisfläche mit dem Radius  $r$ , also das Volumen der zweidimensionalen Kugel.
3. Sie macht die Angabe über die Dimensionszahl, bei der das (zahlenmäßige) Maximum der Oberflächen aller mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius  $r$  ermittelt werden kann.
4. Sie enthält ebenso die Angabe über die Dimensionszahl, bei der das (zahlenmäßige) Maximum der Volumina aller mehrdimensionalen Kugeln mit dem Radius  $r$  zu erwarten ist.

Die hier genannten Vermutungen beruhen auf einer großen Anzahl von numerischen Berechnungen. Die größte dabei verwendete Zahl lag im Bereich der neunundvierzigtausend Stellen. Ein zusammenhängender Beweis für die Gültigkeit für alle Kardinalzahlen konnte noch nicht erbracht werden.

## 7 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist entstanden aus Interesse an einem speziellen Abschnitt der historischen Entwicklung der Wissenschaftsdisziplin Mathematik. Gemeint ist hier der Zeitraum der zweiten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts. Zu jener Zeit wurden die herausragenden Erkenntnisse über algebraische Flächen und mehrdimensionale Räume gewonnen, obwohl (oder gerade weil?) den damaligen Mathematikern keinerlei rechen-technische Hilfsmittel zur Verfügung standen. Eine auffällige Besonderheit stellt auch die Riemannsche Zahlenkugel dar, die in abstrahierter Form ein außergewöhnliches Vorstellungsbild anbietet. Ihr geometrisches Modell impliziert die gedankliche Möglichkeit, wie sich eine unendliche Ebene auf eine endliche Kugeloberfläche abbilden lassen könnte. Etwa fünfzig Jahre später eröffnete das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren andererseits den Weg zur Vorstellung von  $n$ -dimensionalen Kugeln [8], die sich schließlich in die hier benutzten Formeln unter Verwendung der Gammafunktion fixieren ließen. Die numerische Nutzung dieser Erkenntnisse wurde jedoch wesentlich erschwert durch das äußerst schnelle Erreichen sehr großer Zahlen und damit erst wieder interessant durch gezielte Anwendung moderner Rechentechnik.

Das Thema der Volumenberechnung mehrdimensionaler Kugeln bot sich Anfang 1996 aber gerade dadurch zum Testen verschiedener Mathematik-Lehrprogramme für Schüler und Studenten an. Die ermittelten Ergebnisse zeigten unter anderem das verblüffend einfache Bild der  $D$ -Parabeln. Mit dem vorliegenden Text soll hier abschließend die folgende Vermutung dargestellt werden, dass die  $D$ -Parabel für beliebige Radien sowohl für die Oberflächen als auch für die Volumina die Dimension kennzeichnet oder eingrenzt, bei der deren zahlenmäßige Maximalwerte zu erwarten sind.

## 8 Begriffe

**Dimension:** Der Begriff der Dimension wird im allgemeinen Sprachgebrauch für unterschiedliche Inhalte benutzt. Schon der Unterschied zwischen der physikalischen und der mathematischen Auslegung macht das deutlich. In der Physik bezeichnet die Dimension eine *physikalische Qualität, die zur Beschreibung des Zusammenhangs im Rahmen eines Einheitssystems ... durch keine andere ersetzt werden kann* [6]. In der Mathematik wird damit u.a. die Anzahl der Basiselemente der Basis eines Vektorraumes bezeichnet. Noch undeutlicher wird der allgemeine Begriff Dimension durch seine Anwendung in der Fraktal-Geometrie. Hier werden die Gebilde zwischen den völlig unterschiedlichen Qualitäten *Linie* und *Fläche* zugeordnet, die *Dimension* bedeutet dabei eine Zahl zwischen eins und zwei.

In der vorliegenden Arbeit ist die Dimension als ein Raum-Begriff definiert, der die Anzahl der zur Verfügung stehenden Raumachsen benennt. Diese Raumachsen sollen Achsen sein, die alle im Sinne des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aufeinander senkrecht stehen. Ihre Angabe erfolgt in Kardinalzahlen  $n = 1; 2; 3; \dots$

**D-Parabel:** Dieser Begriff, anknüpfend an den Begriff der *Dimension* im o.g. Sinn, beschreibt eine mathematische Vermutung über die besonderen Aussagen der Parabel

$$n_{max} = \lambda |2\pi r^2 - / + 1)$$

zu den Dimensionszahlen  $n$ , bei denen ein (einziges) zahlenmäßiges Maximum zu erwarten ist.

**Riemannsche Zahlenkugel:** Jeder komplexen Zahl der Gaußschen Zahlenebene wird ein Punkt auf einer Kugel zugeordnet, die auf dieser Ebene im Koordinatenursprung aufliegt. Ein Strahl vom obersten Pol der Kugel ausgehend, ihre Sphäre durchstehend, tastet die Ebene ab und ordnet so die jeweiligen Punkte der Ebene den Punkten der Kugeloberfläche zu (Stereographische Projektion).

Neben ihrer entschieden höheren Relevanz für das Rechnen mit komplexen Zahlen trägt die Riemannsche Kugel auf andere Art eine interessante Bedeutung für geometrische Anschauungen im dreidimensionalen Raum. Sie modelliert die beiden Schnittstellen zwischen den Dimensionen  $n=1$  und  $n=2$ , sowie  $n=2$  und  $n=3$  (Gerade / Fläche und Fläche / Körper). Sie versinnbildlicht beispielsweise, wie eine unendliche Ebene auf eine endliche



Kugeloberfläche abgebildet werden kann, wie aus unendlichen Geraden endliche Kreise gebildet werden können, und wie immer größere Kreise sich schließlich in einem Punkt abbilden.

## 9 Quellen

### Literatur

- [1] Hrg. G. Grosche, V. Ziegler  
Ergänzende Kapitel zu I.N. Bronstein, K.A. Semendajew  
Leipzig 1979 S.12-13
- [2] Gerd Fischer, Mathematische Modelle, mit Kommentarband  
Aus den Sammlungen von Universitäten und Museen  
Akademie-Verlag Berlin 1986
- [3] Ewald Wasmuth, Der unbekannte Pascal  
Verlag Friedrich Pustet - Regensburg 1962 S. 81 ff
- [4] Josef Naas, Hermann Ludwig Schmid, Mathematisches Wörterbuch  
Mit Einbeziehung der theoretischen Physik  
Akademie-Verlag Berlin B.G.Teubner Stuttgart 1984  
(Im Auftrag des Instituts für Mathematik  
der Akademie der Wissenschaften der DDR)  
Band I S.1032 - 1037
- [5] Rainer Wüst, Mathematik für Physiker und Mathematiker  
Band 2 Analysis im Mehrdimensionalen  
Weinheim 2002, S. 855
- [6] Brockhaus Physik, Leipzig 1972 Bd.1 S. 258
- [7] G.M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften  
Berlin 1964  
Band III S. 389
- [8] Hans Rohrbach, Erhard Schmidt - Ein Lebensbild  
in: Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung Band 69  
Stuttgart 1967 S.238 f.